

ИНТЕРАКТИВНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ В ВИРТУАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ САВРИ 3D Часть 2

Статья продолжает обзор возможностей, предоставляемых новой инструментальной средой *Sabri 3D* для преподавания стереометрии.

1. БАЗОВЫЕ И ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ В САВРИ 3D

Таблица 1 предоставляет конструктивные возможности, разбитые на 4 инструментальные группы. Ниже приводятся разъяснения к ним. Соответствующие базовые и основные конструкции помещены в рамки.

Эти конструкции «полиморфны», то есть соответствующий объект строится только после выбора объекта, его определяющего. Например, плоскость может быть построена по трем точкам, по точке и прямой или по двум нескрещивающимся прямым.

Для построения таких простых объектов, как угол или многоугольник, требуются лучи и отрезки, то есть объекты, являю-

щиеся частью другого объекта-носителя (в данном случае – прямой). В пространстве необходимы такие объекты, как полуплоскость для построения двугранного угла или многоугольник для построения многогранника т.д. *Sabri 3D* содержит инструменты для этих построений. Также имеются объекты, представляющие конические сечения. На них можно ссылаться по имени.

Применим теперь имеющиеся инструменты для построения. При этом мы не будем обосновывать каждый шаг – речь идет только об описании процесса построения в виртуальном пространстве. При построении первой точки и зависящего от этой точки объекта всегда начинают с некоторой «референтной» плоскости. Конструкции, созданные на основе этой плоскости, можно назвать «пространственными». Например, такие конструкции: точка вне этой плоскости, перпендикуляр к плоскости, плоскость, перпендикулярная прямой и т.д.

Пример 1. Построение перпендикуляра по Евклиду

Начнем с первого пространственного построения Евклида в первой из его книг, посвященных стереометрии (книги XI–XIII в.) опускание перпендикуляра из точки на плоскость (рисунок 1).

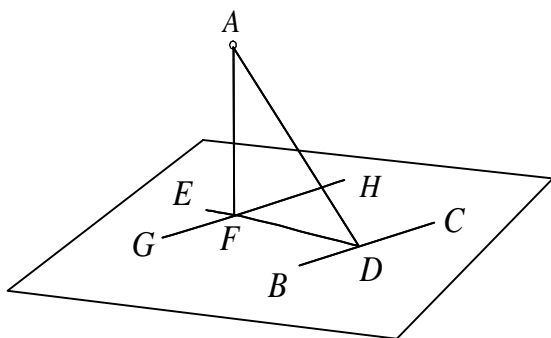


Рисунок 1.

Таблица 1. Элементарные и основные построения.

Точка	Прямая/окружность	Плоскость/сфера	Перпендикуляр/ параллель
<ul style="list-style-type: none"> Точка в пространстве. Точка на объекте. Точка пересечения. Например, клавиша Shift создает точку в пространстве.	<ul style="list-style-type: none"> Прямая по двум точкам. Прямая, содержащая отрезок. Пересечение двух плоскостей. 	<ul style="list-style-type: none"> Плоскость по трем точкам. Плоскость через данную точку и прямую. Плоскость через две пересекающиеся прямые. Плоскость, содержащая данный многоугольник или угол. 	<ul style="list-style-type: none"> Перпендикуляр из точки на плоскость. Плоскость, проходящая через точку перпендикулярно прямой. Перпендикуляр из точки на прямую.
<ul style="list-style-type: none"> Точка пересечения двух объектов (двух линий или линии с поверхностью). 	<ul style="list-style-type: none"> Отрезок по двум точкам Ребро многогранника. 	<ul style="list-style-type: none"> Треугольник по трем точкам. 	<ul style="list-style-type: none"> Прямая через точку параллельно данной прямой. Плоскость через точку параллельно данной плоскости.
	<ul style="list-style-type: none"> Луч с вершиной в данной точке и проходящий через другую точку. 	<ul style="list-style-type: none"> Многоугольник по заданным вершинам. 	<ul style="list-style-type: none"> Плоскость, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.
	<ul style="list-style-type: none"> Окружность в данной плоскости по ее центру и одной точке. Окружность по точке и оси, проходящей через центр. Круговое сечение (шар и плоскость, два шара). 	<ul style="list-style-type: none"> Угол по двум точкам и вершине. 	
	<ul style="list-style-type: none"> Конические сечения по пяти точкам, лежащим в одной плоскости. 	<ul style="list-style-type: none"> Сфера по ее центру и одной точке. 	<ul style="list-style-type: none"> Середина отрезка.
	<ul style="list-style-type: none"> Линия пересечения двух поверхностей. 		

Процесс построения в Cabri 3D:

- строим точку в пространстве: A ,
- строим точку на плоскости: B ,
- строим точку на плоскости: C ,
- строим прямую: BC ,
- строим плоскость: ABC ,
- опускаем перпендикуляр из A на BC ,
- находим точку пересечения перпендикуляра с BC : D («Точка пересечения»),
- строим перпендикуляр из точки D к BC ,
- строим точку на перпендикуляре: E ,
- строим плоскость: ADE ,
- опускаем перпендикуляр из A на DE ,
- находим точку пересечения перпендикуляра с DE : F («Точка пересечения»).

Возможное сокращение конструкции с помощью опции: «плоскость через прямую и точку».

Описанную конструкцию (рисунок 2) можно рассматривать со всех сторон (рисунок 2).

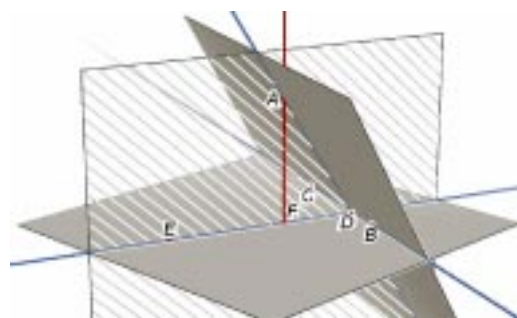


Рисунок 2. Построение конфигурации.

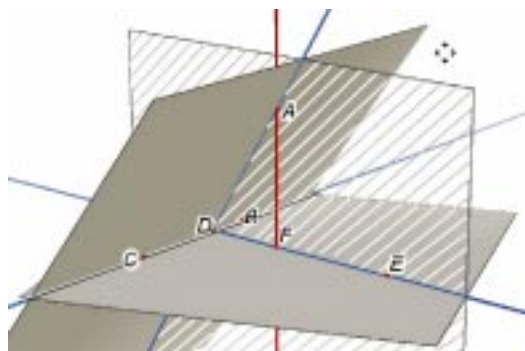


Рисунок 3. Визуализация конфигурации.

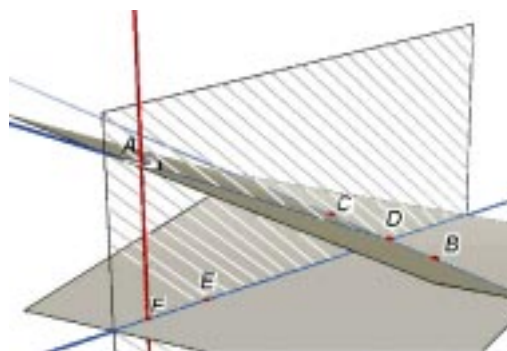


Рисунок 4. Варьирование конфигурации.

нок 3). Варьируя исходные параметры, например точку A , можно экспериментально проверить правильность конструкции (рисунок 4). Последовательность этапов «Построение – Визуализация – Варьирование» желательна почти для всех конструкций, но в дальнейшем мы ограничимся лишь построением.

Пример 2. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Одна из возможных конструкций: Через произвольную точку G на прямой g стро-

им прямую, параллельную h , и затем плоскость через g и параллельную прямую (рисунок 5). Из любой точки на h опускаем перпендикуляр на плоскость и находим его основание I (рисунок 6).

Двигая H можно менять положение точки I и таким образом найти нужный отрезок (рисунок 7, 8). Отрезок $LgLh$ – кратчайший среди отрезков, соединяющих точки прямых g и h .

Пример 3. Эквивалент несуществующей точки пересечения высот в тетраэдре

Строим по четырем не лежащим в одной плоскости точкам тетраэдр, причем грани делаем прозрачными, чтобы была видна внутренность пирамиды. Опускаем перпендикуляр из каждой вершины на противоположную грань и из точки пересечения высот каждой грани восстанавливаем перпендикуляр к этой грани (рисунок 9). Получаем четыре пары параллельных прямых. Для каждой такой пары проводим параллельную прямую, проходящую в той же плоскости и равноудаленную от них. Можно доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке. Эта точка (точка Монжа) служит «заменителем» несуществующей точки пересечения высот. Точка Монжа лежит на одной прямой с центром описанной сферы M

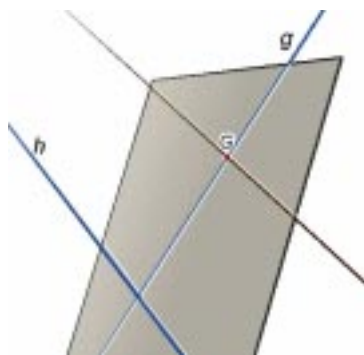


Рисунок 5.

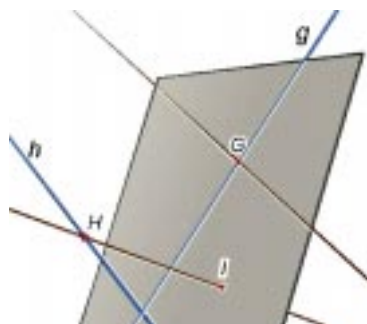


Рисунок 6.

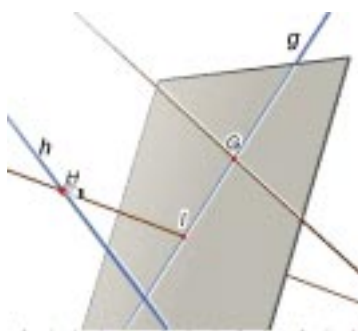


Рисунок 7.

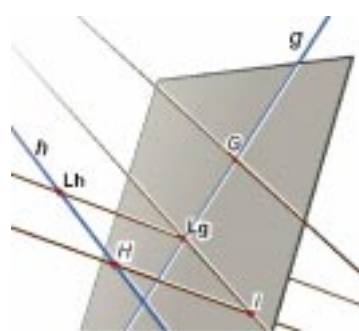


Рисунок 8.

и центром тяжести S тетраэдра, называемой прямой Эйлера (рисунок 10). Этот пример демонстрирует, как можно открывать новые свойства с помощью построений (другие примеры: Schumann 2004a).

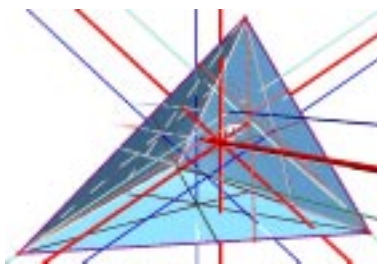


Рисунок 9.

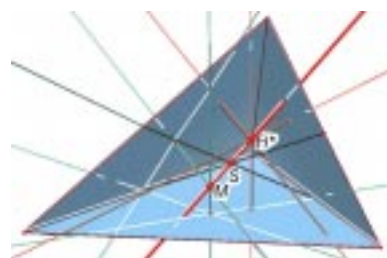


Рисунок 10.

Пример 4. Правильный октаэдр с описанной и вписанной сферами

Построим окружность большого круга и две ортогональные прямые, пересекающие сферу в четырех соответствующих точках (рисунок 11). Далее строим сферу и проводим через ее центр перпендикуляр к плоскости. Этот перпендикуляр пересекает сферу в двух недостающих точках. Итого получаем шесть вершин октаэдра. Заштрихуем шесть из восьми граней, чтобы опустить перпендикуляр из M на одну из граней. Сфера с центром в M , проходящая через основание этого перпендикуляра, является вписанной сферой октаэдра (рисунок 12).

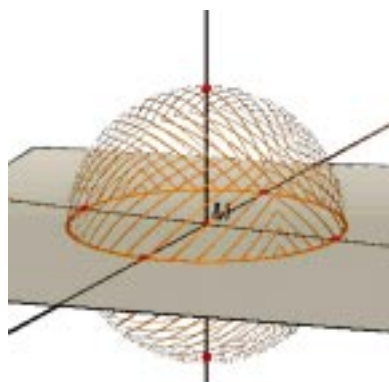


Рисунок 11.

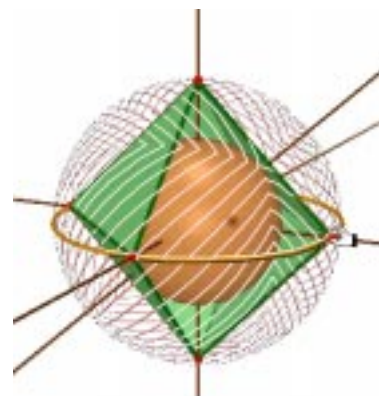


Рисунок 12.

Пример 5. Построение описанной вокруг шестигранника сферы на основе четырехугольников

Отмечаем на сфере точки A, B, C, F . Через тройки точек A, B, C ; A, B, F и $B, C,$

F проводим окружности (рисунок 13). На эти окружностях отмечаем точки D, E и G соответственно. Окружности AED, CDG и EFG пересекаются в недостающей восьмой вершине шестигранника (рисунок 14), грани которого заштрихованы (рисунок 15). Следствие: сфера, описанная вокруг шестигранника с четырехугольными гранями, однозначно определяется одним его пространственным углом.

Пример 6. Особые линии и точки в сферическом треугольнике

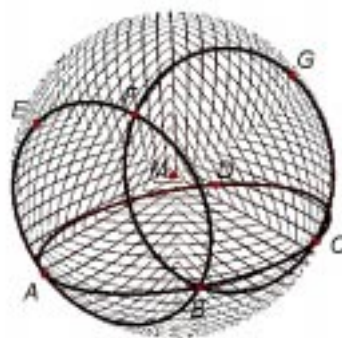


Рисунок 13.

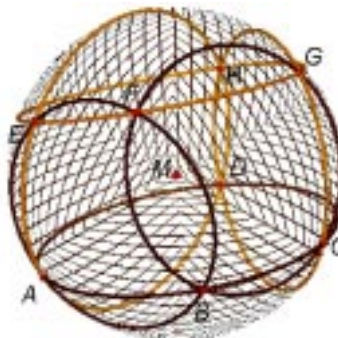


Рисунок 14.

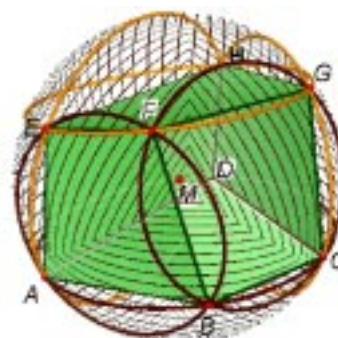


Рисунок 15.

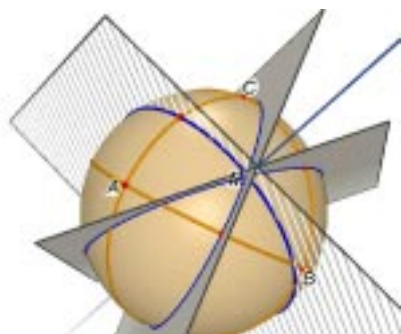


Рисунок 16.

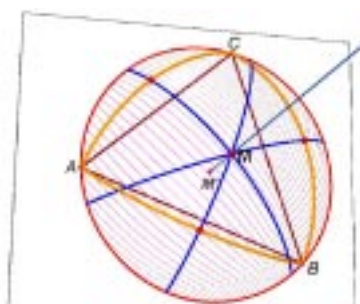


Рисунок 17.

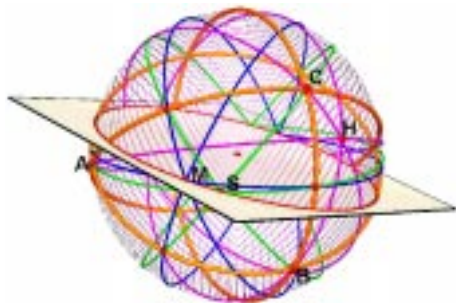


Рисунок 18.

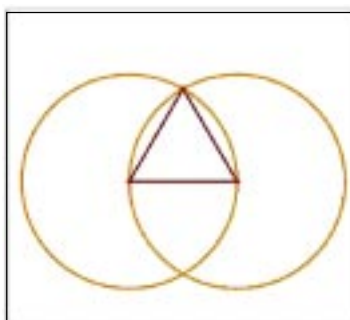


Рисунок 19.

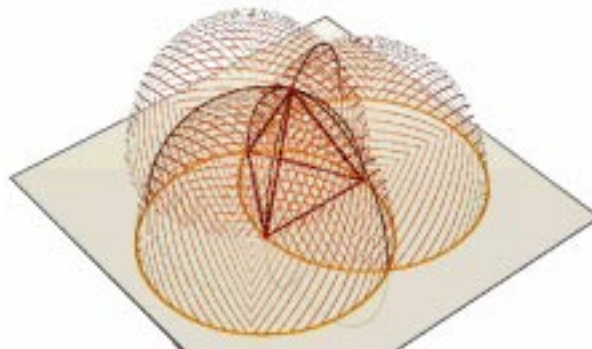


Рисунок 20.

Пусть A, B, C – точки на сфере, не лежащие на одной большой окружности. Через каждые две точки из них проведем большие окружности. Эти окружности образуют сферический треугольник ABC . Плоскости, проходящие через середины сторон треугольника перпендикулярно плоскостям соответствующих больших окружностей, вырезают на сфере так называемые срединные перпендикуляры (рисунок 16). Эти перпендикуляры пересекаются в одной точке M . Опустим перпендикуляр из M на плоскость ABC (рисунок 17). Его основание M' является центром описанной окружности как плоского, так и сферического треугольников ABC . В противоположность плоскому треугольнику аналогично построенные точка S (пересечение медиан), точка H (пересечение высот) и точка M не лежат на одной большой окружности (рисунок 18).

Пример 7. Правильный тетраэдр из трех сфер

В плоскости, параллельной экрану строим правильный треугольник согласно первой конструкции Евклида (рисунок 19). Далее поворачиваем плоскость «назад». Через каждые две вершины треугольника проводим сферы с центром в другой вершине. Эти сферы пересекаются по дугам, которые сходятся в обной точке – вершине правильного тетраэдра (рисунок 20).

2. ПОСТРОЕНИЯ

С КОНГРУЭНТНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Создание копий объектов является эффективным инструментом в конструировании. В *Sabri 3D* встроены следующие конгруэнтные отображения, позволяющие создавать копии объектов: симметрии относительно точки, прямой, плоскости, а также параллельный перенос и поворот относительно некоторой оси на заданный угол. С помощью этих отображений можно элегантно решать различные задачи на построение. Вращая объект на угол $360^\circ/n$, $n = 2, 3, \dots$, можно

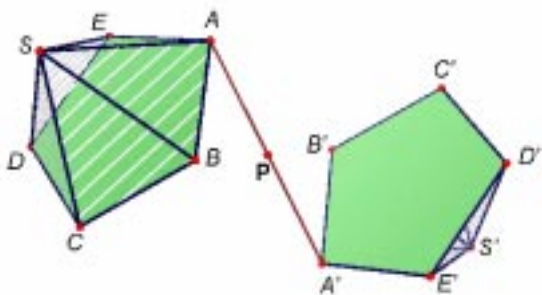


Рисунок 21. Симметрия относительно точки.

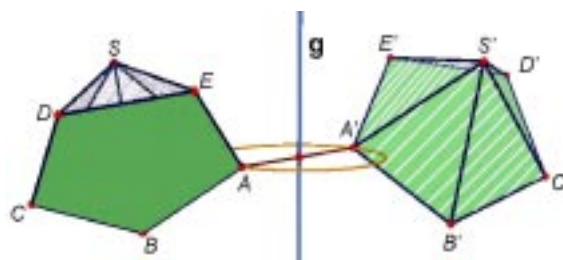


Рисунок 22. Симметрия относительно прямой (поворот на 180°).

получать фигуры, обладающие определенной симметрией. Одинаково ориентированные конгруэнтные фигуры можно отобразить друг на друга с помощью нескольких последовательных симметрий относительно плоскостей.

Для точечных отображений применяются отображения подобия (в том числе центральная проекция), аффинные отображения, стереографическая проекция, симметрия относительно сферы и т. д.

Рисунки 21–25 иллюстрируют применение конгруэнтных отображений в Cabri 3D на примере правильной пятиугольной пирамиды.

3. ПОСТРОЕНИЯ С ПРАВИЛЬНЫМИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ

Модуль для построения правильных многоугольников является основой для построения многогранников (таблица 2). Такие выпуклые многогранники могут иметь в качестве граней только правильные треугольники, квадраты, а также правильные пяти-, шести-, восьми-, десяти- и двенадцатиугольники. Из них можно строить с помощью конгруэнтных отображений так на-

Таблица 2. Модуль для построения правильных многоугольников.

Возможные построения
• Правильный треугольник.
• Квадрат.
• Пятиугольник.
• Шестиугольник.
• Восьмиугольник.
• Десятиугольник.
• Двенадцатиугольник.

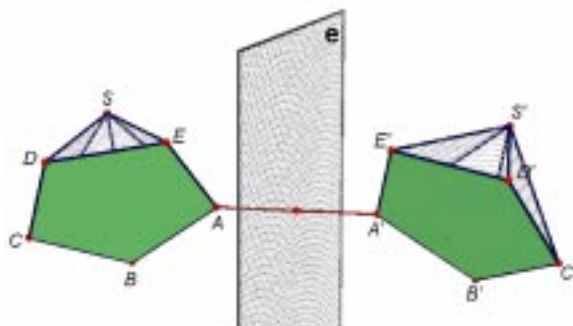


Рисунок 23. Симметрия относительно плоскости.

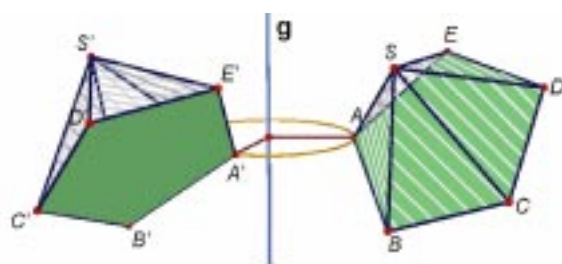


Рисунок 25. Вращение вокруг оси.

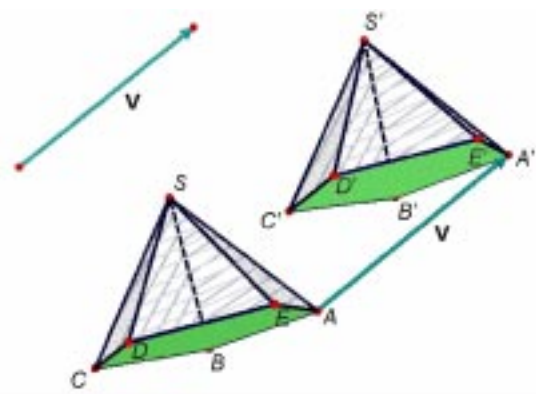


Рисунок 24. Параллельный перенос.



Рисунок 26.

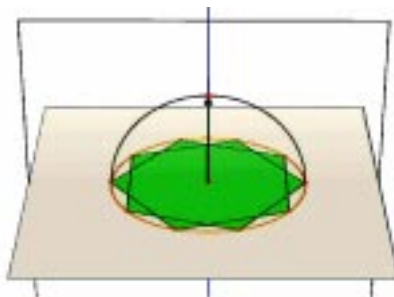


Рисунок 27.

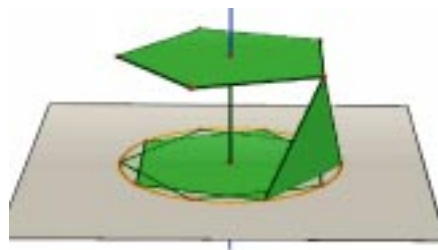


Рисунок 28.

зываются тела Джонсона (vgl. <http://home.aanet.com.au/robertw/Glossary.html>). Неискушенный в стереометрии пользователь может не знать, что не существует многогранника, например, с семиугольными правильными гранями, поэтому желательно, чтобы программа давала содержательное геометрическое объяснение этому факту. Для построения звездных многогранников, особенно методом Кеплера-Пуансо, можно использовать встроенные методы для правильных пяти- и шестиугольников.

В качестве примера рассмотрим построение икосаэдра по методу Евклида в 13-й книге его «Элементов».

Пример 8. Построение икосаэдра

Сначала строится правильная пятиугольная антипризма и на нее накладывается правильная пятиугольная пирамида. Дадим подробное описание алгоритма.

Для каждого шага алгоритма в Cabri 3D встроен соответствующий инструмент.

Построение пятиугольной антипризмы:

- 1) строим окружность,
- 2) вписываем в нее правильный пятиугольник – основание антипризмы,

- 3) строим пятиугольник, симметричный первому относительно центра окружности (рисунок 26),

- 4) восстанавливаем перпендикуляр к основанию (рисунок 27),

- 5) строим вспомогательную плоскость, проходящую через перпендикуляр,

- 6) в этой плоскости строим окружность с тем же центром и радиусом, что и первая окружность (рисунок 27),

- 7) определяем точку пересечения этой окружности и перпендикуляра (рисунок 27),

- 8) строим вектор сдвига от центра окружности до точки пересечения (рисунок 27),

- 9) делаем параллельный перенос пятиугольника на вектор сдвига – получаем верхнее основание (рисунок 28),

- 10) строим 5 боковых граней (треугольники) (рисунок 28),

- 11) строим остальные 5 боковых граней с помощью симметрии относительно середины перпендикуляра (рисунок 29).

Пирамидальная надстройка:

- 12) проводим окружность через одну из вершин нижнего основания вокруг противоположного ребра верхнего основания (рисунок 29),

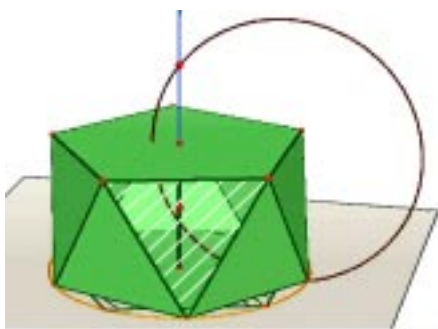


Рисунок 29.

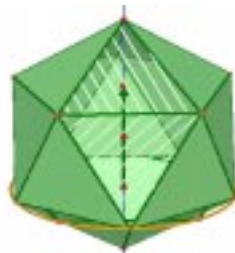


Рисунок 30.



Рисунок 31.

Таблица 3. Модуль для построения правильных многогранников.

Многогранник	Правильный многогранник
<ul style="list-style-type: none"> • Тетраэдр по четырем точкам. 	<ul style="list-style-type: none"> • Правильный тетраэдр по его грани. • Правильный тетраэдр по центру грани и вершине.
<ul style="list-style-type: none"> • Прямоугольный параллелепипед по двум точкам (концам диагонали). 	<ul style="list-style-type: none"> • Куб по его грани. • Куб по центру грани и вершине.
<ul style="list-style-type: none"> • Призма по выпуклому многоугольнику и вектору. 	<ul style="list-style-type: none"> • Правильный восьмигранник по его грани (треугольнику). • Правильный восьмигранник по центру грани и вершине.
<ul style="list-style-type: none"> • Пирамида по выпуклому многоугольнику и точке (вершине). 	<ul style="list-style-type: none"> • Правильный двенадцатигранник по его грани (пятиугольнику). • Правильный двенадцатигранник по центру грани и вершине.
<ul style="list-style-type: none"> • Выпуклый многогранник как выпуклая оболочка нескольких точек. 	<ul style="list-style-type: none"> • Правильный двадцатигранник по его грани (треугольнику). • Правильный двадцатигранник по центру грани и вершине.
<ul style="list-style-type: none"> • Многогранник как пересечение другого многогранника с данным полупространством. 	

13) отмечаем точку пересечения этой окружности с перпендикуляром – вершину пирамиды (рисунок 29),

14) соединим эту точку с вершинами верхнего основания – получаем пирамиду. То же самое можно осуществить с помощью инструмента «Выпуклая пирамида»,

15) применяем симметрию относительно середины перпендикуляра и получаем додекаэдр.

Завершая конструкцию, определим объект «Выпуклый многогранник» как выпуклую оболочку его вершин. С определенным так объектом можно выполнять соответствующие операции и отображения (рисунок 31).

3.4. ПОСТРОЕНИЯ НА ОСНОВЕ МНОГОГРАННИКОВ

Модули для построения в пространстве позволяют строить тетраэдр, куб, выпуклую призму, выпуклую пирамиду и произвольный выпуклый многогранник (как выпуклую оболочку конечного числа вершин) (таблица 3, левая часть). Эти тела яв-

ляются объектами, к которым можно применять встроенные в Cabri 3D операции, такие как, например, «Сечение многогранника». Результатом такой операции является часть многогранника, которая в свою очередь является объектом (Schumann 2001).

Рассмотрим, в качестве примера, построение модели Кастель дель Монте (Castel del Monte, Götze 1991).

Пример 9

Сначала строим исходную схему (рисунок 32). На ее основе строятся две призмы – внешняя и внутренняя (рисунок 33). Затем строим одну угловую «Башню», из которой с использованием поворота и симметрии по-

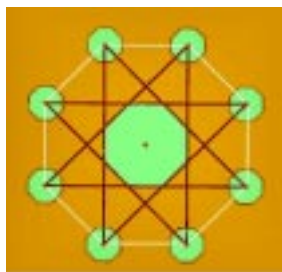


Рисунок 32.

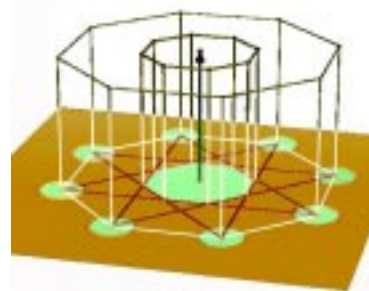


Рисунок 33.

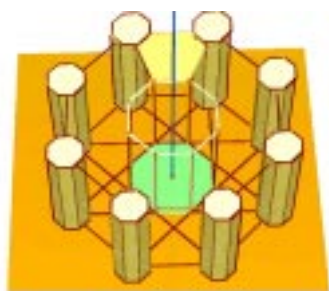


Рисунок 34.

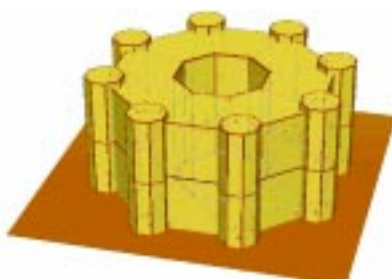


Рисунок 35.



Рисунок 36.

лучаем остальные «Башни» (рисунок 34). Затем накрываем конструкцию многогранником и, в заключение, проводим среднее сечение тела (рисунок 35). Рисунок 36 показывает вид сверху.

Дальнейшие примеры можно найти в работе «Интерактивное моделирование в виртуальном пространстве» (Schumann 2005b).

Правильные многогранники служат исходным материалом для разнообразных конструкций в пространстве. (таблица 4, справа). Здесь мы лишь касаемся этого вопроса (Schumann 2004b).

Пример 10. Усеченный октаэдр

Впишем в куб правильный шестиугольник (рисунок 37) и рассмотрим часть куба над плоскостью шестиугольника (рисунок 38). Полученный объект отражаем несколько раз относительно одной из его треугольных граней (рисунок 39) пока не получим кубическую оболочку (рисунок 40), которая содержит усеченный октаэдр (рисунок 41). Конечно, его можно было бы построить и другим способом – срезая углы обычного октаэдра.

Пример 11

Строим оси, перпендикулярные граням куба (рисунок 42). Затем куб на 45° поворачивает вокруг каждой оси (рисунок 43, 44). Получаем «Учетверенный куб».

Какой симметрией он обладает по сравнению с обычным кубом?

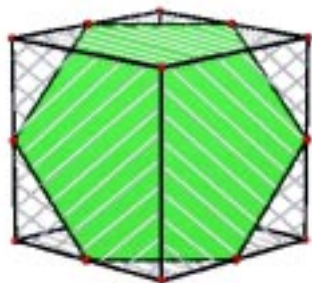


Рисунок 37.

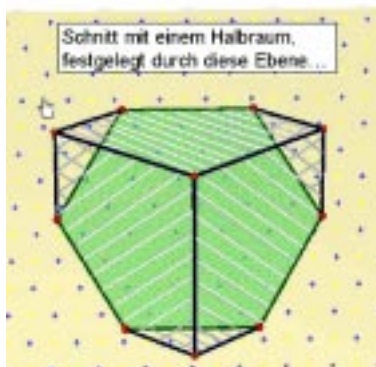


Рисунок 38.

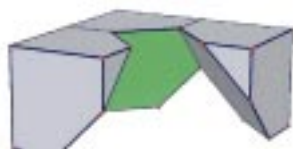


Рисунок 39.

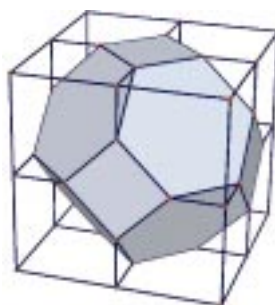


Рисунок 40.

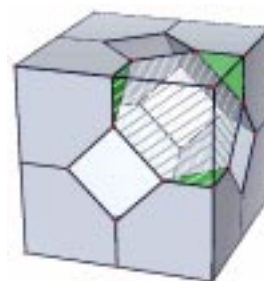


Рисунок 41.

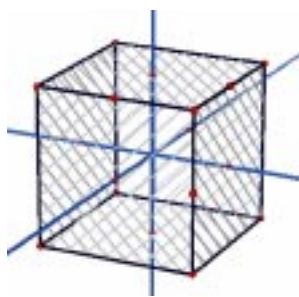


Рисунок 42.

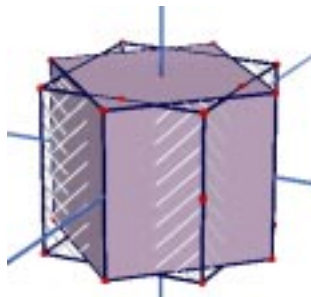


Рисунок 43.

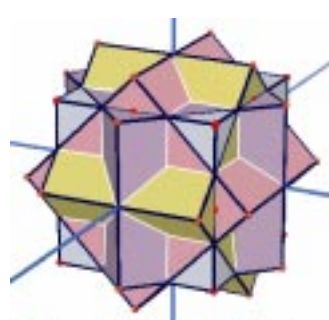


Рисунок 44.

Пример 12. Кольцо из многогранников или тороид

Частным решением общей задачи построения кольца из платоновых или архимедовых многогранников является конструкция из правильных октаэдров и икосаэдров (рисунок 45). Существуют и другие подобные кольца из октаэдров и икосаэдров. Интерактивное конструирование таких и более сложных тел основано на готовых моделях (объектах) в Cabri 3D.

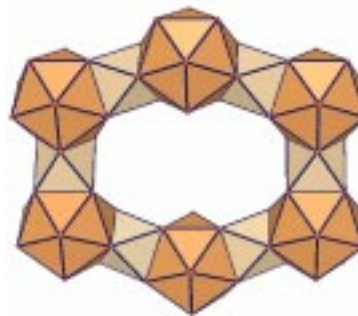


Рисунок 45.

Литература

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.0. (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann) zu beziehen von www.cotec.de

Bieberbach, L. (1952): Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel: Birkhuser

Graf, U. (1964): Darstellende Geometrie. Bearbeitet von M. Barner. Heidelberg: Quelle & Meyer

Götze, H. (1991): Die Baugesamtheit von Castel del Monte. Мюнхен: Prestel

Holland, G. (1996): Geometrie in der Sekundarstufe. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum

Quaisser, E. ; Sprengel, H.-J. (1989): Geometrie in Плоскость und Raum. Berlin: DVW

Wolff, G. (Hrsg.) (1966): Handbuch der Schulmathematik. 2. Auflage. Hannover: Schroedel

Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler-Teubner

Schumann, H. (2001): Raumgeometrie-Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen

Schumann, H. (2004a): Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Пример «Dreieck – Tetraэдр». In: math. did. 27, Bd. 1, S. 82–99

Schumann, H. (2004b): Konstruktion von Polyedermodellen mit Cabri 3D im Umfeld der platonischen Körper. In: Beitrдge zum Computereinsatz in der Schule. Jg. 18, Heft 2, S. 3-48

Schumann, H. (2005a): Dynamische Raumgeometrie. In: Beitrдge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker

Schumann, H. (2005b): Interaktives geometrisches Modellieren im virtuellen Raum mit Cabri 3D. In: LOG IN – Informatische Bildung und Computer in der Schule, Heft 133, S. 55–61

Schumann, H. (2005c): Eine dynamische Behandlung der Kegelschnitte mit Cabri 3D. Erscheint in: MNU Jhg. 58, Heft 6

Thaer, C. (Hg.) (1980): Euklid. Die Elemente. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft

Prof. Dr. Heinz Schumann
Faculty III, Mathematics/Informatics,
University of Education Weingarten
D-88250 Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

Перевод М. Юдовина

